OPCIÓN A

A.1.- .-Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide

a) Halla $\mathbf{A^n}$ para todo entero positivo **n**

b) Calcula, si existe, la inversa de la matriz **A** y de la matriz $\mathbf{I_3 + A}$

$a)$

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2.A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ldots\ldots A^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$b)$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\ (Los\ componentes\ de\ la\ última\ \ fila\ son, todos, ceros)\Rightarrow$$

$$Como\ |A|=0\Rightarrow No\ existe\ A^{-1}$$

$$I_3+A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow|I_3+A|=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow Existe\ (I_3+A)^{-1}\Rightarrow$$

$$(I_3+A)^{-1}=\frac{1}{|I_3+A|}\cdot adj(I_3+A)^t\Rightarrow(I_3+A)^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}\Rightarrow adj(I_3+A)^t=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(I_3+A)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A.2.- Sean **r** la recta determinada por los puntos **A = (1 , 0 , -1)** y **B = (1 , -1 , -1),** y **s** la recta de ecuaciones $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$. Se pide:

a) Averiguar su posición relativa

b) Calcular, si existe, una recta que pase por el punto **C = (1 , 2 , 4)** y que corte a las rectas **r** y **s**

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)-(1,0,-1)=(0,-1,0)\equiv(0,1,0)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=\lambda\\ z=-1\end{cases} \\ \qquad s\equiv\begin{cases}x=3+2\mu\\ y=5\mu\\ z=3\mu\end{cases}\end{cases}\Rightarrow \frac{0}{2}\neq\frac{1}{5}\Rightarrow$$

No son paralelas ni coincidentes

$$\begin{cases}1=3+2\mu\\ \lambda=5\mu\\ -1=3\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2=2\mu\Rightarrow\mu=-1\\ -1=3\mu\Rightarrow\mu=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow -1\neq-\frac{1}{3}\Rightarrow \textit{No se cortan, no son secantes}$$

Las rectas r y s se cruzan

$b)$

$$v_t=(1-3-2\mu\,,\,\lambda-5\mu\,,\,-1-3\mu)$$

$$t\equiv\frac{x-1}{1-3-2\mu}=\frac{y-\lambda}{\lambda-5\mu}=\frac{z+1}{-1-3\mu}\Rightarrow\frac{1-1}{1-3-2\mu}=\frac{2-\lambda}{\lambda-5\mu}=\frac{4+1}{-1-3\mu}\Rightarrow\frac{0}{-2-2\mu}=\frac{2-\lambda}{\lambda-5\mu}=\frac{5}{-1-3\mu}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{0}{-2-2\mu}=\frac{2-\lambda}{\lambda-5\mu}\Rightarrow(2-\lambda)(-2-2\mu)=0\Rightarrow-4-4\mu+2\lambda+2\mu\lambda=0\\ \frac{0}{-2-2\mu}=\frac{5}{-1-3\mu}\Rightarrow 5(-2-2\mu)=0\Rightarrow-10-10\mu=0\Rightarrow-10\mu=10\Rightarrow\mu=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$-4-4(-1)+2\lambda+2(-1)\lambda=0\Rightarrow-4+4+2\lambda-2\lambda=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow \textit{Infinitas soluciones}$$

$$\overrightarrow{v_t}=[-2-2.(-1)\,,\,\lambda-5.(-1)\,,\,-1-3.(-1)]=(0\,,\,\lambda+5\,,\,2)$$

$$t\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{\lambda+5}=\frac{z-4}{2}$$

A.3.- .- a) Hallar los valores de los coeficientes **b, c** y **d** para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje **OY** en el punto **(0 , -1**), pase por el punto **(2 , 3)** y en ese punto tenga tangente paralela al eje **OX.**

b) Una vez hallados estos valores hallar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función

$a)$

$$y' = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \Rightarrow 0^3 + b.0^2 + c.0 + d = -1 \Rightarrow d = -1 \\ f(2) = 3 \Rightarrow 2^3 + b.2^2 + c.2 - 1 = 3 \Rightarrow 8 + 4b + 2c - 1 = 3 \Rightarrow 4b + 2c = -4 \Rightarrow \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3.2^2 + 2b.2 + c = 0 \Rightarrow 4b + c = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b + c = -2 \\ -4b - c = 12 \end{cases} \Rightarrow -2b = 10 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow 2.(-5) + c = -2 \Rightarrow c = -2 + 10 = 8 \Rightarrow$$

$$y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

$b)$

$$y' = 3x^2 - 10x + 8 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 96 = 4 > 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10+2}{6} \\ x = \frac{10-2}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow y' = (x-2)\cdot\left(x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

	$-\infty$ — $\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$ — **2**	**2** — ∞
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$x > \frac{4}{3}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Resultado	**(+)**	**(-)**	**(+)**

$$Crecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re / \left(x < \frac{4}{3}\right) \cup (x > 2)$$

$$Decrecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re / \frac{4}{3} > x > 2$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow (2\ ,\ 3) \Rightarrow Minimo\ relativo\ (de\ decrecimiento\ pasa\ a\ crecimiento) \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\cdot\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = \frac{64}{27} - 5\cdot\frac{16}{9} + \frac{32}{3} - 1 = \frac{64 - 240 + 288 - 27}{27} = \frac{85}{27} \Rightarrow \end{cases}$$

$$En \left(\frac{4}{3}\ ,\ \frac{85}{27}\right) \Rightarrow Máximo\ relativo\ (de\ crecimiento\ pasa\ a\ decrecimiento)$$

A.4.- Un rectángulo tiene por vértices los puntos coordenados **(0 , 0), (a , 0), (a , b)** y **(0 , b),** de modo que el punto **(a , b)** tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de la ecuación $y = \frac{1}{x^2} + 4$ **.** De todos estos rectángulos hallar, razonadamente, el de área mínima

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a\ ,\ 0) - (0\ ,\ 0) = (a\ ,\ 0) \\ \overrightarrow{BC} = (a\ ,\ b) - (a\ ,\ 0) = (0\ ,\ b) \\ \overrightarrow{CD} = (0\ ,\ b) - (a\ ,\ b) = (-\,a\ ,\ 0) \equiv (a\ ,\ 0) \\ \overrightarrow{DA} = (0\ ,\ 0) - (0\ ,\ b) = (0\ ,\ -b) \equiv (0\ ,\ b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (a\ ,\ 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = a \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} = (0\ ,\ b) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{a^2} + 4 \\ A = a.b = a \cdot \left(\dfrac{1}{a^2} + 4 \right) = \dfrac{a}{a^2} + 4a = \dfrac{1}{a} + 4a \end{cases} \Rightarrow A' = \frac{dA}{da} = -\frac{1}{a^2} + 4 \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 4 \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{da^2} = \frac{2}{a^3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A''\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{8}} = 16 \Rightarrow \textit{Mínimo} \\ A''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{2}{-\dfrac{1}{8}} = -16 \Rightarrow \textit{Máximo} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} + 4 = \frac{1}{\dfrac{1}{4}} + 4 = 4 + 4 = 8$$

OPCIÓN B

B.1.- Tenemos una matriz 3 x 3 cuyas columnas son (de izquierda a derecha) **C_1, C_2, C_3** y su determinante vale 2

a) Se considera la matriz **A** cuyas columnas son (de izquierda a derecha) –**C_2, $C_3 + C_2$, $3C_1$**, calcular razonadamente el determinante de la matriz **A^{-1}** caso e que esta matriz inversa exista

b) Sea ahora la matriz cuyas columnas son **$C_1 + C_2$, $C_2 + C_3$, $C_3 - C_1$**. Razonar la existencia o no existencia de la matriz inversa de la misma

$a)$

$$\begin{aligned}
&\left|-C_2 \quad C_3+C_2 \quad 3C_1\right| = (-1)\cdot\left|C_2 \quad C_3+C_2 \quad 3C_1\right| = (-1)\cdot\left|C_2 \quad C_3 \quad 3C_1\right| + (-1)\cdot\left|C_2 \quad C_2 \quad 3C_1\right| = \\
&= (-1)\cdot\left|C_2 \quad C_3 \quad 3C_1\right| - (-1)\cdot 0 = (-1)\cdot\left|C_2 \quad C_3 \quad 3C_1\right| = (-1)\cdot 3\cdot\left|C_2 \quad C_3 \quad C_1\right| = \\
&= (-1)\cdot(-1)\cdot 3\cdot\left|C_3 \quad C_2 \quad C_1\right| = 3\cdot\left|C_3 \quad C_2 \quad C_1\right| = (-1)\cdot 3\cdot\left|C_1 \quad C_2 \quad C_3\right| = (-1)\cdot 3\cdot 2 = -6
\end{aligned}$$

$b)$

$$\begin{aligned}
&\left|C_1+C_2 \quad C_2+C_3 \quad C_3-C_1\right| = \left|C_1 \quad C_2+C_3 \quad C_3-C_1\right| + \left|C_2 \quad C_2+C_3 \quad C_3-C_1\right| = \\
&= \left|C_1 \quad C_2 \quad C_3-C_1\right| + \left|C_1 \quad C_3 \quad C_3-C_1\right| + \left|C_2 \quad C_2 \quad C_3-C_1\right| + \left|C_2 \quad C_3 \quad C_3-C_1\right| = \\
&= \left|C_1 \quad C_2 \quad C_3-C_1\right| + \left|C_1 \quad C_3 \quad C_3-C_1\right| + 0 + \left|C_2 \quad C_3 \quad C_3-C_1\right| = \\
&= \left|C_1 \quad C_2 \quad C_3\right| - \left|C_1 \quad C_2 \quad C_1\right| + \left|C_1 \quad C_3 \quad C_3\right| - \left|C_1 \quad C_3 \quad C_1\right| + \left|C_2 \quad C_3 \quad C_3\right| - \left|C_2 \quad C_3 \quad C_1\right| = \\
&= 2 - 0 + 0 - 0 + 0 - \left|C_2 \quad C_3 \quad C_1\right| = 2 - (-1)\cdot\left|C_2 \quad C_1 \quad C_3\right| = 2 - (-1)\cdot(-1)\cdot\left|C_1 \quad C_2 \quad C_3\right| = 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

B.2. Dado los puntos **A = (1 , 0 , 0)**, **B = (0 , -1 , 0)** y **C = (0 , 0 , 3)**, se pide:

Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de **A**, **B** y **C**, indicando que figuran forman

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (x\,,\,y\,,\,z) - (1\,,\,0\,,\,0) = (x-1\,,\,y\,,\,z) \\ \overrightarrow{BP} = (x\,,\,y\,,\,z) - (0\,,\,-1\,,\,0) = (x\,,\,y+1\,,\,z) \\ \overrightarrow{CP} = (x\,,\,y\,,\,z) - (0\,,\,0\,,\,3) = (x\,,\,y\,,\,z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + z^2} \\ \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 1 = 2y + 1 \Rightarrow 2x + 2y = 0 \\ -2x + 1 = -6z + 9 \Rightarrow 2x - 6z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Recta} \Rightarrow y = -x \Rightarrow z = \frac{x+4}{3} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \frac{4}{3} + \frac{\lambda}{3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \left(1\,,-1\,,\ \frac{1}{3}\right) \equiv (3\,,-3\,,\ 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \frac{4}{3} + \lambda \end{cases}$$

B.3.- Halla el punto de la curva de la ecuación $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ en el que la tangente a la misma tiene pendiente mínima. Escribir la ecuación de dicha tangente

$$m = f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \Rightarrow m' = 6x - 6 \Rightarrow m' = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$m'' = 6 \Rightarrow Mínimo$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 6.1 - 4 = 0 \\ f'(1) = 3.1^2 - 6.1 + 6 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow y - 0 = 3 \cdot (x-1) \Rightarrow y = 3x + 3 \Rightarrow 3x - y + 3 = 0$$

B.4.- Hallar todas las funciones **f** cuya derivada es $f'(x)=\dfrac{x^4+x+1}{x^2+x}$ indicando el dominio de definición de esta

$$\begin{array}{l|l} x^4+x+1 & \underline{x^2+x} \\ \underline{-x^4-x^3} & x^2-x+1 \\ \quad -x^3+x+1 & \\ \quad \underline{x^3+x^2} & \\ \qquad x^2+x+1 & \\ \quad \underline{-x^2-x} & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^4+x+1}{x^2+x}=x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x}$$

$$f(x)=\int\frac{x^4+x+1}{x^2+x}\,dx=\int x^2dx-\int x\,dx+\int dx+\int\frac{1}{x^2+x}\,dx=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+x-\int\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+1)x}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+B(x+1)}{x^2+x}\Rightarrow Ax+B(x+1)=1\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow A.0+B(0+1)=1\Rightarrow B=1 \\ x=-1\Rightarrow A.(-1)+B(-1+1)=1\Rightarrow A=-1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+x-\int\frac{1}{t}\,dt+\ln\,x=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+x-\ln\,t+\ln\,x$$

$$x+1=t\Rightarrow dx=dt$$

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+x-\ln\,(x+1)+\ln\,x=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+x+\ln\,\frac{x}{x+1}+K$$

$b)$

$$x^2+x=0\Rightarrow(x+1)x=0\Rightarrow\begin{cases} x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow f'(-1)=\dfrac{(-1)^4+(-1)+1}{0}=\dfrac{1-1+1}{0}=\dfrac{1}{0} \\ x=0\Rightarrow f'(-1)=\dfrac{0^4+0+1}{0}=\dfrac{1}{0}\end{cases}$$

$$Dom(f')=\forall x\in\Re-\{-1\,,\,0\}$$